INSTITUT NATIONAL DE LA STATISTIQUE
ET DES ÉTUDES ÉCONOMIQUES

CONCOURS POUR L'ADMISSION D'ÉLÈVES TITULAIRES STATISTICIENS ÉCONOMISTES À L'ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE ET DE L'ADMINISTRATION ÉCONOMIQUE.

Mai 1974. — Option MATHÉMATIQUES

PREMIÈRE COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

Durée : 3 heures

N.B. — 1° Les candidats devront prendre garde aux conventions de langage ci-après :

a. Dans tout l'énoncé, la suite, réelle ou complexe, dont le terme général est a_n, est appelée « suite $\{ a_n \}$ ». Si toutefois on veut indiquer qu'on s'intéresse à la convergence, ou à la divergence de la *série* dont le terme général est a_n, on parle de la série (a_n).

b. Le terme de « suite à termes positifs » sans autre précision désigne une suite réelle dont tous les termes sont positifs *ou nuls*. De même, une suite dite croissante, sans autre précision, est une suite réelle telle que, pour tout n, $a_{n+1} - a_n \geqslant 0$ (autrement dit : la suite considérée est croissante *au sens large*).

c. Une série à termes positifs est une série telle que pour tout n, $a_n \geqslant 0$ et telle de plus que $a_1 > 0$. Il est clair en effet que toute série telle que $a_n \geqslant 0$ pour tout n et ayant au moins un terme strictement positif se ramène à la forme précédente, si on accepte de négliger, éventuellement, les premiers termes nuls.

d. Dans tout l'énoncé, la numérotation des termes des suites et des séries débute au terme a_1 (autrement dit : l'ensemble des indices est celui des entiers strictement positifs).

Par exception à ce qui précède, dans le cas d'une série entière $(a_n x^n)$, l'ensemble des indices est celui des entiers positifs *y compris* 0 (autrement dit : le premier terme est a_0).

e. Le symbole Log x désigne le logarithme népérien de x.

2° La partie préliminaire, très simple, conditionne toute la suite du problème.

La partie III est constituée par un ensemble d'applications numériques de la partie II; la partie IV examine diverses réciproques du II; elle ne dépend pas de la partie III. Toutefois, il est conseillé aux candidats de traiter le III — plus facile — avant le IV.

La partie V ne dépend pas des parties II, III, IV.

3° On rappelle le théorème suivant, connu sous le nom de « critère de Cauchy » :

Pour que la suite complexe $\{ a_n \}$ soit convergente, il est nécessaire et suffisant qu'à tout $\varepsilon > 0$ on puisse associer un entier positif $N(\varepsilon)$ tel que :

$$p > N(\varepsilon) \quad \text{et} \quad k \geqslant 0 \quad \text{entraînent} \; | a_p - a_{k+p} | < \varepsilon$$

***

PARTIE PRÉLIMINAIRE

1° Soit une suite $\{ f_n \}$ de fonctions continues, à valeurs réelles, d'une variable réelle x, définies si x appartient à l'intervalle fermé fini $[a, b]$. On suppose que la série de fonctions (f_n) converge vers une fonction S uniformément par rapport à x appartenant à $[a, b]$, ce qui signifie que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier $N(\varepsilon)$ tel que

$$n > N(\varepsilon) \text{ entraîne } \left| \sum_{p=1}^{p=n} f_p(x) - S(x) \right| < \varepsilon$$

quel que soit x appartenant à $[a, b]$.

Montrer que la somme de la série, S, est une fonction *continue* pour tout x appartenant à $[a, b]$.

2° Soient deux suites complexes $\{ a_n \}$ et $\{ b_n \}$.

On pose $s_p = \sum_{k=1}^{k=p} b_k = b_1 + b_2 + \ldots + b_p$.

Vérifier l'identité (connue sous le nom de *transformation d'Abel*) :

$$\sum_{p=1}^{p=n} a_p \, b_p = \sum_{p=1}^{p=n-1} (a_p - a_{p+1}) \, s_p + s_n \, a_n .$$

***

PARTIE I

1° *Règle d'Abel.*

On considère une série à termes complexes de terme général :

$$u_n = \varepsilon_n \, v_n$$

où les suites $\{ \varepsilon_n \}$ et $\{ v_n \}$ possèdent les propriétés suivantes :

— la suite $\{ \varepsilon_n \}$ est réelle, décroissante, de limite 0 si $n \to + \infty$;

— la suite $\{ v_n \}$ est complexe, et telle que, pour tout n,

$$\left| \sum_{p=1}^{p=n} v_p \right| \leqslant M$$

où M est un nombre positif fixe.

Prouver que la série de terme général u_n est convergente.

2° Quel théorème classique retrouve-t-on dans le cas où $v_n = (-1)^n$, ε_n étant quelconque, mais satisfaisant aux hypothèses indiquées ci-dessus?

***

PARTIE II

On considère une fonction f, à valeurs réelles, d'une variable réelle x, développable en série entière dans l'intervalle de convergence $]-R, +R[$, où R est fini, strictement positif :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \quad \text{si} \quad -R < x < R$$

Tournez la page S. V. P.

On suppose de plus que la série $(a_n R^n)$ est convergente, et l'on pose

$$f(R) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n R^n$$

Montrer que si $x \to R$ par valeurs inférieures, $f(x) \to f(R)$ (autrement dit : f est continue à gauche pour $x = R$).

Pour cela, on démontrera que la série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ converge uniformément par rapport à x si x appartient à l'intervalle fermé [0, R]. On observera, pour ce faire, que la suite de terme général

$$S_n(R) = \sum_{p=0}^{p=n} a_p R^p$$

étant supposée convergente, est « de Cauchy », donc que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N(\varepsilon)$ tel que :

$n > N(\varepsilon)$ et $p \geqslant 0$ entraînent $| a_{n+1} R^{n+1} + \ldots + a_{n+p} R^{n+p}| < \varepsilon$

On appliquera ensuite à la somme :

$$(a_{n+1} x^{n+1} + \ldots + a_{n+p} x^{n+p}) \qquad (\text{où} \qquad 0 \leqslant x \leqslant R)$$

la transformation d'Abel, en écrivant préalablement que :

$$a_k x^k = a_k R^k \left(\frac{x}{R}\right)^k$$

et en posant $\varepsilon_k = \left(\frac{x}{R}\right)^k$.

Quel résultat analogue peut-on énoncer si la série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (-R)^n$ est maintenant supposée convergente?

***

PARTIE III

1° A partir du résultat de la partie II, retrouver les formules connues :

$$\text{Log } 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} + \ldots$$

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \ldots + \frac{(-1)^n}{2n+1} + \ldots$$

2° On considère deux séries (u_n) et (v_n) à termes complexes, absolument convergentes, de sommes respectives U et V. On pose :

$$w_n = \sum_{k=1}^{k=n} u_k v_{n-k+1}$$

Montrer que la série (w_n) est absolument convergente et que sa somme W vérifie

$$W = U V$$

On pourra d'abord traiter le cas où (u_n) et (v_n) sont des séries réelles avec $u_n \geqslant 0$ et $v_n \geqslant 0$ pour tout n.

3° Prenons ici

$$u_n = v_n = \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$$

La série (u_n) est-elle convergente? L'est-elle absolument?

On forme

$$w_n = \sum_{k=1}^{k=n} u_k v_{n-k+1}$$

Quelle est la nature de la série (w_n)?

4° On suppose cette fois que les séries (u_n) et (v_n) sont *réelles* et convergentes (mais non nécessairement absolument convergentes) et que, de plus, la série (w_n) telle que :

$$w_n = \sum_{k=1}^{k=n} u_k v_{n-k+1}$$

est convergente (en général non absolument).

Montrer que les sommes U, V, W des trois séries vérifient :

$$W = U\,V$$

On pourra pour cela introduire les fonctions f, g, h telles que, x étant réel, et sous réserve de convergence :

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n x^n$$

$$g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} v_n x^n$$

$$h(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} w_n x^{n+1}$$

* * *

PARTIE IV

On examine ici des réciproques du résultat de la partie II. x et $f(x)$ sont toujours supposés réels.

1° On suppose que f est développable en série entière dans $]-R, +R[$ (avec $R > 0$ fini) et, de plus, que si $x \to R$ par valeurs inférieures, $f(x)$ admet une limite *finie l.*

Ces hypothèses permettent-elles d'affirmer la convergence de la série $(a_n R^n)$? (Si oui, le démontrer; si non, donner un contre-exemple).

2° On fait les mêmes hypothèses qu'au 1° et on suppose de plus que $a_n \geqslant 0$ pour tout n.

Peut-on affirmer la convergence de la série $(a_n R^n)$? Quel résultat analogue peut-on énoncer lorsque $x \to -R$?

3° On suppose que $\lim_{n \to +\infty} n\,a_n = 0$, les signes des a_n étant quelconques.

Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier positif k tel que : $N > k$ entraîne :

$$\left| \sum_{n=k}^{n=N} a_n (1 - x^n) \right| \leqslant \varepsilon N (1 - x)$$

et

$$\left| \sum_{n=N+1}^{+\infty} a_n x^n \right| \leqslant \frac{\varepsilon N}{1 - x}$$

pour tout x appartenant à $[0, 1[$.

En déduire que si on fait les hypothèses suivantes :

a. $R = 1$;

b. Si $x \to 1$ par valeurs inférieures, $f(x)$ admet une limite finie l;

c. $\lim_{n \to +\infty} n\,a_n = 0$,

alors la série (a_n) est convergente, de somme l.

(L'attention des candidats est attirée sur le fait qu'on ne fait ici aucune hypothèse sur le signe de a_n).

Ce résultat constitue le théorème de Tauber.

4° Quel résultat — analogue à celui du 3° — peut-on énoncer dans le cas où R est fini, strictement positif, mais différent de 1?

* * *

PARTIE V

1° Soit $\{ \alpha_n \}$ une suite croissante de réels strictement positifs, telle que $\alpha_n \to +\infty$ si $n \to +\infty$. Montrer qu'il existe une série positive convergente (a_n) et une série positive divergente (A_n) telles que, pour tout n,

$$A_n \leqslant \alpha_n a_n$$

(on pourra prendre $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{\alpha_{n-1}}} - \dfrac{1}{\sqrt{\alpha_n}}$, $\quad A_n = \sqrt{\alpha_n} - \sqrt{\alpha_{n-1}}$

Tournez la page S. V. P.

2° Montrer que pour toute série positive convergente (a_n), il existe une suite positive $\{ \alpha_n \}$, croissante, telle que $\alpha_n \to +\infty$ si $n \to +\infty$, et telle que la série de terme général $\alpha_n a_n$ soit encore convergente.

[On pourra former le rapport $\dfrac{a_n}{R_{n-1}^{\alpha}}$, avec $R_{n-1} = \sum_{p=n}^{+\infty} a_p$, α étant un exposant appartenant à $]0,1[$, et montrer l'inégalité $\dfrac{a_n}{R_{n-1}^{\alpha}} \leqslant \dfrac{1}{1-\alpha} (R_{n-1}^{1-\alpha} - R_n^{1-\alpha})$].

3° Montrer que pour toute série positive divergente (a_n), il existe une suite positive $\{ \alpha_n \}$ décroissante telle que $\alpha_n \to 0$ si $n \to +\infty$ et telle que la série de terme général $\alpha_n a_n$ soit encore divergente.

4° On considère maintenant une suite $\{ u_n \}$ telle que $u_n \geqslant 0$ et $u_n \to 0$ si $n \to +\infty$. (Il n'est pas imposé ici à u_n d'être constamment décroissant). Montrer qu'il existe une série positive (v_n) telle que :

— la série (v_n) diverge;

— la série $(u_n v_n)$ converge;

— le produit $u_n \cdot \left(\sum_{p=1}^{p=n} v_p \right)$ ait pour limite 0 si $n \to +\infty$.

(Ce résultat est analogue à celui du 1°, mais il est un peu plus précis).

5° *Réciproque de la Règle d'Abel.*

Soit une série *convergente* à termes complexes, (a_n), de somme (complexe) S. Montrer que, quelle que soit la série convergente (a_n), il existe :

— une suite positive $\{ \varepsilon_n \}$ décroissante et de limite 0;

— une suite complexe $\{ b_n \}$ vérifiant $\left| \sum_{p=1}^{p=n} b_p \right| \leqslant M$ pour tout n,

M étant un nombre positif fixe, telles que :

$$a_n = \varepsilon_n b_n$$

(Autrement dit : toute série complexe convergente peut être considérée comme convergeant *par application de la règle d'Abel*).

L'attention des candidats est attirée sur le fait que la série de terme général $|a_n|$ n'est pas, en général, convergente.

On aura à utiliser la transformation d'Abel. Il pourra être commode de poser

$$\sum_{p=1}^{p=n} a_p = S - R_n.$$

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail